第34卷 第3期
2016年3月

河 南 科 学
HENAN SCIENCE

Vol.34 No.3
Mar. 2016

文章编号:1004-3918(2016)03-0305-05

关于Smarandache LCM函数在简单数序列上的均值研究

赵西卿, 张利霞, 许宏鑫, 郭 瑞

(延安大学 数学与计算机科学学院,陕西 延安 716000)

摘 要:根据简单数序列及Smarandache LCM函数的性质,应用初等方法研究Smarandache LCM函数$SL(n)$在简单数序列上的均值性质.且给出两个有趣的渐进公式.

关键词: Smarandache LCM函数; 简单数序列; 初等方法; 均值性质

中图分类号:O 156.4　　**文献标识码**:A

On the Mean Value Properties of the Sequence of Simple Numbers for the Smarandache LCM Function

Zhao Xiqing, Zhang Lixia, Xu Hongxin, Guo Rui

(School of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an 716000, Shaanxi China)

Abstract: The elementary was used to study the mean value properties of simple numbers about the Smarandache LCM function, and we obtained two interesting asymptotic formulas by using the property of the sequence of simple number and Smarandache LCM function.

Key words: Smarandache LCM function; simple number; elementary methods; mean value properties

1 引言及相关结论

美籍罗马尼亚著名数论专家F. Smarandache教授在文献[1]中介绍了不少未解决的数论问题,并引入了简单数的概念,即对任意正整数n,如果n的所有真因子的乘积小于或等于n,则称n为简单数,通常记A为所有简单数的集合.

对于任意正整数n,F. Smarandache LCM函数定义为最小的正整数k使得$n\mid[1,2,\cdots,k]$,即$SL(n)=\min\left\{k: k\in N, n\mid[1,2,\cdots,k]\right\}$. 近年来许多学者对$SL(n)$的初等性质进行了研究并获得了许多有意义的结果[2-11],例如文献[9]研究了均方差$\left(SL(n)-\bar{\Omega}(n)\right)^2$的均值分布问题,证明了对给定的整数$k\geqslant 2$,对任意实数$x\geqslant 2$,有渐进式

$$\sum_{n\leqslant x}\left(SL(n)-\bar{\Omega}(n)\right)^2=\frac{4}{5}\cdot\zeta\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{C_i x^{\frac{5}{2}}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中$\zeta(n)$为Riemann Zeta-函数,$C_i(i=2,3,\cdots,k)$为可计算的常数.

收稿日期:2015-12-28
基金项目:陕西省教育厅科研计划资助项目(2013JK0557);延安大学研究生教育创新计划项目
作者简介:赵西卿(1965-),男,副教授,硕士生导师,研究方向为解析数论.

文献[10]研究了复合函数 $SL(Z(n))$ 的均值，并得到一个较强的渐进式

$$\sum_{n\leqslant x}SL(Z(n))=\frac{\pi^2}{18}\cdot\frac{(x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2x}}+\mathrm{O}\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中：$b_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数，$Z(n)$ 为著名的伪Smarandache函数.

文献[11]研究了函数 $U(n)$ 和 $V(n)$ 在简单数序列上的性质，并给出两个渐进公式

$$\sum_{n\leqslant x,n\in A}U(n)=\frac{x^2}{\ln x}\ln\ln x+A\frac{x^2}{\ln x}+\frac{x^2}{2\ln^2 x}\ln\ln x+O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right),$$

$$\sum_{n\leqslant x,n\in A}V(n)=\frac{x^2}{\ln x}\ln\ln x+B\frac{x^2}{\ln x}+\frac{x^2}{2\ln^2 x}\ln\ln x+O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right).$$

本文在前人关于数论函数的均值问题的研究成果的基础上，主要研究Smarandache LCM函数 $SL(n)$ 在简单数序列上的均值性质. 且给出两个有趣的渐进公式，具体结果如下.

定理1　对任给的实数 $x\geqslant 2$，有渐进公式：

$$\sum_{n\leqslant x,n\in A}SL^k(n)=\frac{Bx^{k+1}}{(k+1)\ln x}+\frac{Cx^{k+1}}{(k+1)^2\ln^2 x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^3 x}\right),$$

其中：k 为非负实数，B,C 为可计算的常数.

定理2　对任给的实数 $x\geqslant 2$，有渐进公式：

$$\sum_{n\in A,n\leqslant x}\frac{1}{SL(n)}=D\ln\ln x+\frac{E\sqrt{x}}{\ln x}\ln\ln x+O\left(\frac{\sqrt{x}}{\ln x}\right),$$

其中：B，C 为可计算的常数.

2　相关引理

引理1[12]　对于任意的素数 p，有 $SL(p^k)=p^k$.

引理2[13]　假设 $n\in A$，则 n 的取值只能是 $n=p$，$n=p^2$，$n=p^3$ 或 $n=pq$ 这4种情况，其中：p,q 为不同的素数.

引理3　对于任给的素数 p，假设实数 $x\geqslant 2$，有渐进公式：

$$\sum_{p\leqslant\sqrt[n]{x}}p^{nk}=\frac{nx^{\frac{nk+1}{n}}}{(nk+1)\ln x}+\frac{n^2x^{\frac{nk+1}{n}}}{(nk+1)^2\ln^2 x}+O\left(\frac{n^3x^{\frac{nk+1}{n}}}{\ln^3 x}\right),$$

其中 n 为任给的正整数，k 为非负实数.

证明　由Abel恒等式[14]和 $\Pi(x)=\frac{x}{\ln x}+\frac{x}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right)$ 可得

$$\sum_{p\leqslant\sqrt[n]{x}}p^{nk}=\int_1^{\sqrt[n]{x}}t^{nk}\mathrm{d}\Pi(t)=x^{nk}\Pi(x)-nk\int_1^{\sqrt[n]{x}}\Pi(t)t^{nk-1}\mathrm{d}t=$$

$$\frac{nx^{\frac{nk+1}{n}}}{\ln x}+\frac{n^2x^{\frac{nk+1}{n}}}{\ln^2 x}-nk\int_1^{\sqrt[n]{x}}\frac{t}{\ln t}t^{nk-1}\mathrm{d}t-nk\int_1^{\sqrt[n]{x}}\frac{t}{\ln^2 t}t^{nk-1}\mathrm{d}t+O\left(\frac{n^3x^{\frac{nk+1}{n}}}{\ln^3 x}\right)=$$

$$\frac{nx^{\frac{nk+1}{n}}}{\ln x}+\frac{n^2x^{\frac{nk+1}{n}}}{\ln^2 x}-\frac{nk}{nk+1}\frac{nx^{\frac{nk+1}{n}}}{\ln x}-\frac{nk(nk+2)}{nk+1}\int_1^{\sqrt[n]{x}}\frac{t}{\ln^2 t}t^{nk-1}\mathrm{d}t+O\left(\frac{n^3x^{\frac{nk+1}{n}}}{\ln^3 x}\right)$$

$$=\frac{nx^{\frac{nk+1}{n}}}{(nk+1)\ln x}+\frac{n^2x^{\frac{nk+1}{n}}}{\ln^2 x}-\frac{nk(nk+2)}{(nk+1)^2}\frac{n^2x^{\frac{nk+1}{n}}}{\ln^2 x}+O\left(\frac{n^3x^{\frac{nk+1}{n}}}{\ln^3 x}\right)$$

$$=\frac{nx^{\frac{nk+1}{n}}}{(nk+1)\ln x}+\frac{n^2x^{\frac{nk+1}{n}}}{(nk+1)^2\ln^2 x}+O\left(\frac{n^3x^{\frac{nk+1}{n}}}{\ln^3 x}\right).$$

证毕.

3 定理的证明

根据函数 $SL(n)$ 的定义及其引理1和2可得

$$\sum_{n\leqslant x,n\in A}SL^k(n)=\sum_{p\leqslant x}SL^k(p)+\sum_{p^2\leqslant x}SL^k(p^2)+\sum_{p^3\leqslant x}SL^k(p^3)+\sum_{pq\leqslant x}SL^k(pq)=$$

$$\sum_{p\leqslant x}p^k+\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}p^{2k}+\sum_{2<p\leqslant\sqrt[3]{p}}p^{2k}+\sum_{p<\sqrt{x}}\sum_{p<q\leqslant\frac{x}{p}}q^k.$$

由引理3易得

$$\sum_{p\leqslant x}p^k=\frac{x^{k+1}}{(k+1)\ln x}+\frac{x^{k+1}}{(k+1)^2\ln^2 x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^3 x}\right), \tag{1}$$

$$\sum_{p\leqslant\sqrt[2]{x}}p^{2k}=\frac{2x^{\frac{2k+1}{2}}}{(2k+1)\ln x}+\frac{2^2x^{\frac{2k+1}{2}}}{(2k+1)^2\ln^2 x}+O\left(\frac{2^3x^{\frac{2k+1}{2}}}{\ln^3 x}\right), \tag{2}$$

$$\sum_{p\leqslant\sqrt[3]{x}}p^{3k}=\frac{3x^{\frac{3k+1}{3}}}{(3k+1)\ln x}+\frac{3^2x^{\frac{3k+1}{3}}}{(3k+1)^2\ln^2 x}+O\left(\frac{3^3x^{\frac{3k+1}{3}}}{\ln^3 x}\right) \tag{3}$$

以及

$$\sum_{p<\sqrt{x}}\sum_{p<q\leqslant\frac{x}{p}}q^k=2\sum_{p<\sqrt{x}}\left(\sum_{q\leqslant\frac{x}{p}}q^k-\sum_{p\leqslant q}q^k\right)=2\sum_{p<\sqrt{x}}\left(\frac{x^{k+1}}{(k+1)p^{k+1}\ln\frac{x}{p}}+\frac{x^{k+1}}{(k+1)^2p^{k+1}\ln^2\frac{x}{p}}+\right.$$

$$\left.O\left(\frac{x^{k+1}}{p^{k+1}\ln^3\frac{x}{p}}\right)-\frac{p^{k+1}}{(k+1)\ln p}-\frac{p^{k+1}}{(k+1)^2\ln^2 p}+O\left(\frac{p^{k+1}}{\ln^3 p}\right)\right)=2\frac{x^{k+1}}{(k+1)\ln x}\sum_{p<\sqrt{x}}\frac{1}{p^{k+1}}\frac{1}{\ln\frac{x}{p}}+$$

$$2\frac{x^{k+1}}{(k+1)^2\ln x}\sum_{p<\sqrt{x}}\frac{1}{p^{k+1}}\frac{1}{\ln^2\frac{x}{p}}+O\left(\frac{x^{k+1}}{p^{k+1}\ln^3\frac{x}{p}}\right)-2\frac{1}{(k+1)}\sum_{p<\sqrt{x}}\left(\frac{p^{k+1}}{\ln p}-\frac{p^{k+1}}{\ln^2 p}+O\left(\frac{p^{k+1}}{\ln^3 p}\right)\right)=$$

$$2\frac{x^{k+1}}{(k+1)\ln x}\sum_{p<\sqrt{x}}\frac{1}{p^{k+1}}\left(1+\frac{\ln p}{\ln x}+\frac{\ln^2 p}{\ln^2 x}+\cdots+\frac{\ln^2 p}{\ln^2 x}+\cdots\right)+$$

$$2\frac{x^{k+1}}{(k+1)^2\ln x}\sum_{p<\sqrt{x}}\frac{1}{p^{k+1}}\left(1+2\frac{\ln p}{\ln x}+\cdots+m\frac{\ln^2 p}{\ln^2 x}+\cdots\right)+O\left(\sum_{p<\sqrt{x}}\frac{x^{k+1}}{p^{k+1}\ln^3\frac{x}{p}}\right)-$$

$$2\frac{1}{(k+1)}\sum_{p<\sqrt{x}}\left(\frac{p^{k+1}}{\ln p}-\frac{p^{k+1}}{\ln^2 p}+O\left(\frac{p^{k+1}}{\ln^3 p}\right)\right)=2\frac{x^{k+1}}{(k+1)\ln x}\sum_{p<\sqrt{x}}\frac{1}{p^{k+1}}+2\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}\left(\frac{1}{k+1}\sum_{p<\sqrt{x}}\frac{\ln p}{p^{k+1}}+\right.$$

$$\left.\frac{1}{(k+1)^2}\sum_{p<\sqrt{x}}\frac{l}{p^{k+1}}+O\left(\sum_{p<\sqrt{x}}\frac{x^{k+1}}{p^{k+1}\ln^3\frac{x}{p}}\right)\right)-2\frac{1}{(k+1)}\sum_{p<\sqrt{x}}\left(\frac{p^{k+1}}{\ln p}-\frac{p^{k+1}}{\ln^2 p}+O\left(\frac{p^{k+1}}{\ln^3 p}\right)\right)=$$

$$\frac{B_1x^{k+1}}{(k+1)\ln x}+\frac{B_2x^{k+1}}{(k+1)^2\ln^2 x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^3 x}\right). \tag{4}$$

综上(1)~(4)可以推出

$$\sum_{n\leqslant x,n\in A}SL^k(n)=\frac{Bx^{k+1}}{(k+1)\ln x}+\frac{Cx^{k+1}}{(k+1)^2\ln^2 x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^3 x}\right).$$

即定理1证毕.

同理由引理1及引理2可得

$$\sum_{n\in A,n\leqslant x}\frac{1}{SL(n)}=\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}+\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{p^2}+\sum_{2<p\leqslant\sqrt[3]{p}}\frac{1}{p^3}+\sum_{p<\sqrt{x}}\sum_{p<q\leqslant\frac{x}{p}}\frac{1}{q},$$

结合引理3易得

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}=\ln\ln x+C_1+O\left(\frac{1}{\ln x}\right), \tag{5}$$

$$\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{p^2}=2\ln\ln x+C_2+O\left(\frac{1}{\ln x}\right), \tag{6}$$

$$\sum_{p\leqslant\sqrt[3]{x}}\frac{1}{p^3}=3\ln\ln x+C_3+O\left(\frac{1}{\ln x}\right) \tag{7}$$

以及

$$\begin{aligned}\sum_{p<\sqrt{x}}\sum_{p<q\leqslant\frac{x}{p}}\frac{1}{q}&=\sum_{p<\sqrt{x}}\left[\ln(\ln x-\ln p)-\ln\ln p+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right]=\sum_{p<\sqrt{x}}\left[\ln\ln x+\ln\left(1-\frac{\ln p}{\ln x}\right)\right]-\\&\sum_{p<\sqrt{x}}\ln\ln p+O\left(\sum_{p<\sqrt{x}}\frac{1}{\ln x}\right)=\frac{D_1\sqrt{x}}{\ln x}\ln\ln x+O\left(\frac{\sqrt{x}}{\ln x}\right).\end{aligned} \tag{8}$$

综上(5)~(8)可以推出

$$\sum_{n\in A,n\leqslant x}\frac{1}{SL(n)}=D\ln\ln x+\frac{E\sqrt{x}}{\ln x}\ln\ln x+O\left(\frac{\sqrt{x}}{\ln x}\right).$$

即定理2证毕.

参考文献:

[1] Smarandache F. Only problems，not solutions[M]. Chicago：Xiquan Publishing House，1993.
[2] 张利霞，赵西卿，韩建勤. 关于Smarandache函数的一个下界估计[J]. 河南科学，2015，33(8)：1291-1293.
[3] 杨衍婷，任刚练. 关于Smarandache LCM函数及Smarandache函数$SM(n)$的混合均值[J]. 黑龙江大学自然科学学报，2013，30(3)：318-320.
[4] Jianbin Chen. Value distribution of the F. Smarandache LCM function[J]. Scientia Magna，2007，3(2)：15-18.
[5] 黄　炜. 2个Smarandache LCM函数的混合均值估计[J]. 纺织高校基础科学学报，2011，24(3)：390-393.
[6] 闫晓霞. Smarandache LCM函数与其对偶函数的混合均值[J]. 内蒙古师范大学学报：自然科学汉文版，2010，39(3)：229-231.
[7] 杨明顺. 关于Smarandache函数及Smarandache LCM函数的混合均值[J]. 西北大学学报：自然科学版，2010，40(5)：772-773.
[8] 张利霞，赵西卿，郭　瑞，等. 关于数论函数方程$S(SL(n))=\varphi(n)$的可解性[J]. 纯粹数学与应用数学，2015，31(5)：533-536.
[9] 赵院娥. 关于Smarandache LCM函数的一类均方差问题[J]. 纯粹数学与应用数学，2008，24(1)：71-74.
[10] 刘　华，吕松涛. 一个包含F. Smarandache函数的复合函数[J]. 江西科学，2009，27(3)：325-327.
[11] 王明军. 简单数序列的两个渐进公式[J]. 河南科学，2014，32(11)：2218-2220.
[12] Liu Yn，Li L，Liu B L. Smarandache unsolved problems and new progress[M]. Ann Arbor，MI：High American Press，2008.
[13] 张文鹏. 初等数论[M]. 西安：陕西师范大学出版社，2007.
[14] Apostol T M. Introduction to analytic number theory[M]. New York：Spring verlag，1976.

（编辑　康　艳）